Khôlles de théorie de la mesure

Semaine du 30/09/2024 – 1 heures – 2 groupes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $N \subset E$ est dite NÉGLIGEABLE par rapport à la mesure μ, s'il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.
On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables et $\mathscr{A} = \{A \cup N : (A, N) \in \mathscr{E} \times \mathscr{N}\}$.

1. Soit $X \in \mathscr{E}$. Montrer que $X \in \mathscr{A}$ si et seulement si il existe $A, B \in \mathscr{E}$ tels que $A \subset X \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.
2. Montrer que $\mathscr{A}$ est une tribu.

Exercice 2. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure de probabilité.
On note $\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$. Démontrer que $\mathscr{T}$ est une tribu sur E.

Exercice 3. Soit $\mathscr{A}$ la tribu sur $\mathbb{Z}$ engendrée par les ensembles $S_n = \{n, n+1, n+2\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
Déterminer $\mathscr{A}$.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure non nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathscr{P}(\mathbb{Z}))$, finie et invariante par translation, *i.e.* que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $A \subset \mathbb{Z}$, on a $\mu(A) = \mu(\{n\} + A)$.

Exercice 5. (Nombres diophantiens)

Soit $\tau > 2$. On dit qu'un irrationnel $x \in [0, 1]$ est τ-diophantien dans $[0, 1]$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^\tau}.$$

En un sens, on peut dire que les nombres τ-diophantiens sont des irrationnels "mal approchés" par des rationnels. On note D_τ l'ensemble des réels τ–diophantiens de $[0, 1]$.
Aussi, on note λ la mesure de Lebesgue définie sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$

1. Soient $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $\lambda\Big(\left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\}\Big)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble

$$A_n = \left\{x \in [0, 1] : \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\}$$

   Montrer que A_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.
   Indication : On remarquera que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A_n = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{0 \leq p \leq q} \left\{x \in [0, 1] : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\}$$

3. En déduire que $\lambda(D_\tau) = 1$.

Exercice 6. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties $\mathscr{A}$–mesurables de E. Démontrer qu'on a l'inégalité :

$$\mu(\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

On rappelle que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k$.

Exercice 7. Soit E un ensemble non dénombrable. On rappellera qu'un ensemble dénombrable est un ensemble qui s'injecte dans $\mathbb{N}$.
Montrer que l'ensemble $\mathscr{T}$ des parties de E qui sont dénombrables ou de complémentaire dénombrable est une tribu.

Exercice 8. **(Ensemble de Vitali)**

Considérons la relation d'équivalence sur $[0,1]$ donnée par $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. On note $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in [0,1]$ associé à cette relation d'équivalence et $\mathscr{C}$ l'ensemble des classes d'équivalences.

Q°1) Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de $[0,1]$.

Pour tout $[x] \in \mathscr{C}$, on choisit un représentant $p_{[x]} \in [x]$ de manière arbitraire et on considère l'ensemble $V \coloneqq \{p_{[x]}\,;\, [x] \in \mathscr{C}\}$. (L'ensemble V est bien défini à l'aide de l'axiome du choix). Pour tout $q \in [0,1]$, on note $V + q \eqqcolon \{x + q\,;\, x \in V\}$.

Q°2) Montrer que

$$[0,1] \subset \bigcup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} V + q \subset [-1,2]\ .$$

Q°3) En déduire que $V \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

1. Supposons que $X \in \mathscr{A}$.
   La définition de $\mathscr{A}$ assure l'existence d'un ensemble $A \in \mathscr{E}$ et d'un ensemble $N \in \mathscr{N}$ tels que $X = A \cup N$. Posons $B = A \cup N = X$. Alors $A \subset X \subset B$.
   Comme $X = B$ est $\mathscr{E}$–mesurable, l'ensemble $B \setminus A$ est $\mathscr{E}$–mesurable et
   $$\mu(B \setminus A) = \mu(B \cap A^c) = \mu((A \cup N) \cap A^c) = \mu((A \cap A^c) \cup (N \cap A^c)) = \mu(N \cap A^c) \ .$$
   Comme N est μ–négligeable, il existe un ensemble $C \in \mathscr{E}$ tel que $N \subset C$ et $\mu(C) = 0$. On observe que $N \cap A^c \subset C$. Par croissance des mesures, on a $\mu(N \cap A^c) \leq \mu(C) = 0$.
   Il s'ensuit que $\mu(B \setminus A) = 0$.

   Supposons qu'il existe deux ensembles $A, B \in \mathscr{E}$ tel que $A \subset X \subset B$ tel que $\mu(B \setminus A) = 0$.
   On observe que
   $$X = A \cup (X \setminus A)$$
   Posons $N = X \setminus A$. Comme $X \subset B$, on a $(X \setminus A) \subset (B \setminus A)$ où $B \setminus A \in \mathscr{E}$ et $\mu(B \setminus A) = 0$. Il s'ensuit que $N \in \mathscr{N}$ ce qui assure que $X = A \cup N \in \mathscr{A}$.
2. Montrons que $\mathscr{A}$ vérifie l'axiomatique des tribus.
   — *(Non vide)*
   On observe que $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$. Or, $\emptyset \in \mathscr{E}$ car $\mathscr{E}$ est une tribu et $\emptyset \in \mathscr{N}$ car $\mu(\emptyset) = 0$. Donc $\emptyset \in \mathscr{A}$.
   — *(Stable par passage au complémentaire)*
   Soit $X \in \mathscr{A}$. La question précédente assure l'existence de $A, B \in \mathscr{E}$ tels que $A \subset X \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.
   On observe que $B^c \subset X^c \subset A^c$. Comme $\mathscr{E}$ est une tribu, elle est stable par passage au complémentaire et donc $A^c \in \mathscr{E}$ et $B^c \in \mathscr{E}$. De plus
   $$\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(A^c \cap B) = \mu(B \setminus A) = 0 \ .$$
   On en déduit que $X^c \in \mathscr{A}$.
   — *(Stable par union dénombrable)*
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$. Posons $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
   La définition de $\mathscr{A}$ assure qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathscr{E}$ et $B_n \in \mathscr{N}$ tel que $X_n = A_n \cup B_n$.
   Il s'ensuit que
   $$X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \ .$$
   Il reste donc à démontrer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{E}$ et $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{N}$.
   Comme $\mathscr{E}$ est une tribu, $A \in \mathscr{E}$ puisqu'il s'agit de l'union dénombrable d'ensembles $\mathscr{E}$–mesurable.
   La définition de $\mathscr{N}$ assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n \in \mathscr{E}$ tel que $B_n \subset C_n$

et $\mu(C_n) = 0$. L'ensemble $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathscr{E}$ puisqu'il s'agit de réunion dénombrable d'ensembles $\mathscr{E}$–mesurables. Par ailleurs, la sous–σ–additivité de μ assure que

$$0 \le \mu(C) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n) = 0 \,.$$

On a donc trouvé un ensemble $C \in \mathscr{E}$ tel que $B \subset C$ et $\mu(C) = 0$ ce qui assure que $B \in \mathscr{N}$.
On peut donc conclure que $X \in \mathscr{A}$

Il s'ensuit que $\mathscr{A}$ est une tribu sur E.

Solution 2. [énoncé]

Démontrons que $\mathscr{T}$ vérifie l'axiomatique des tribus.

(i) Comme μ est une mesure, on sait que $\mu(\emptyset) = 0$. On en déduit que $\emptyset \in \mathscr{T}$.

(ii) Montrons que $\mathscr{T}$ est stable par passage au complémentaire. Étant donné que μ est une mesure de probabilité, nous avons $\mu(E) = 1 < \infty$. Pour toute partie mesurable $A \subset \mathscr{A}$, on observe donc

$$\mu(E\backslash A) = \mu(E) - \mu(A).$$

En particulier, si $A \in \mathscr{T}$, on obtient que

$$\begin{cases} \mu(E\backslash A) = 0 & \text{quand} \quad \mu(A) = 1 \\ \mu(E\backslash A) = 1 & \text{quand} \quad \mu(A) = 0 \end{cases}$$

ce qui assure que $E\backslash A \in \mathscr{T}$.

(iii) Montrons que $\mathscr{T}$ est stable par union dénombrable. Donnons nous une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$. Dans un premier temps, supposons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu(A_n) = 0$. Par σ–sous–additivité de μ, on observe que

$$0 \le \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0.$$

Il s'ensuit que $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$, ce qui montre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.
Maintenant, supposons qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) = 1$. On a

$$A_{n_0} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset E.$$

Par la propriété de croissance des mesures, on a

$$1 = \mu(A_{n_0}) \subset \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \subset \mu(E) = 1.$$

On en déduit que $\mathscr{T}$ est une tribu.

Solution 3. [énoncé]

On constate que les singletons sont des éléments de $\mathscr{A}$. En effet, pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $S_{n-2} \cap S_n = \{n\}$. Donc $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{Z})$.

Solution 4. [énoncé]

Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'une telle mesure $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to [0, \infty]$.

Nous allons commencer par montrer qu'il existe au moins un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$. Dans le cas contraire, on aurait que $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mu(n) = 0$. Étant donné que la mesure μ est σ–additivite, on a

$$\mu(\mathbb{Z}) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Il s'ensuit que μ est la mesure nulle, ce qui est contredit les hypothèses de l'énoncé. On a donc montré qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$.

De plus, on sait que μ est une mesure invariante par translation. On en déduit que

$$\mu(\mathbb{Z}) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\tau_{n-n_0}(\{n_0\})) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n_0\}) = \infty.$$

Ceci contredit le fait que μ est une mesure finie.

Solution 5. [énoncé]

1. (a) Soient $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On observe

$$\Big\{x \in \mathbb{R} : \Big|x - \frac{p}{q}\Big| \leq \frac{1}{nq^\tau}\Big\} = \Big[\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^\tau}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^\tau}\Big].$$

C'est un intervalle fermé, et donc un élément de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(b) Par définition de la mesure de Lebesgue, on a

$$\lambda\Big(\Big\{x \in \mathbb{R} : \Big|x - \frac{p}{q}\Big| \leq \frac{1}{nq^\tau}\Big\}\Big) = \lambda\Big(\Big]\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^\tau}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^\tau}\Big[\Big) = \frac{2}{nq^\tau}.$$

2. — Par conséquent, A_n s'écrit comme une union dénombrable de parties mesurables, ce qui montre que A est mesurable.
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La σ–sous–additivité de λ nous assure que

$$\begin{aligned}\lambda(A_n) &= \lambda\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{0\leq p\leq q} \Big\{x \in [0,1] : \Big|x - \frac{p}{q}\Big| \leq \frac{1}{nq^\tau}\Big\}\Big)\\ &\leq \sum_{q\in\mathbb{N}^*}\sum_{0\leq p\leq q} \lambda\Big(\Big\{x \in [0,1] : \Big|x - \frac{p}{q}\Big| \leq \frac{1}{nq^\tau}\Big\}\Big)\\ &= \sum_{q\in\mathbb{N}^*}\sum_{0\leq p\leq q} \frac{2}{nq^\tau}\\ &= \frac{2}{n}\sum_{q\in\mathbb{N}^*} \frac{q+1}{q^\tau}\end{aligned}$$

Lorsque $q \to \infty$, $\frac{q+1}{q^\tau} \sim \frac{1}{q^{\tau-1}}$. Comme $\tau > 2$, par comparaison avec les série de Riemann, on en déduit que $\sum_{q\in\mathbb{N}^*} \frac{q+1}{q^\tau} < \infty$.
Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on observe que

$$A_n^c = \Big\{x \in [0,1] : \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \Big|x - \frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{nq^\tau}\Big\}$$

La définition de D_τ assure donc que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n^c \subset D_\tau$. Il s'ensuit que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c \subset D_\tau \subset [0,1].$$

Par propriété de croissance des mesures, on a

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c\Big) \leq \lambda(D_\tau) \leq \lambda([0,1]). \tag{1}$$

De plus, on observe que

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c\Big) = \lambda\Big([0,1] \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = \lambda([0,1]) - \lambda\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big), \tag{2}$$

puisque $\lambda([0,1]) = 1 < \infty$.

Par ailleurs, on a par croissance des mesures que

$$\forall k \in \mathbb{N},\, 0 \leq \lambda\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) \leq \lambda(A_k)$$

ce qui permet de conclure par passage à la limite en k que $\lambda\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = 0$. En utilisant l'équation (2), on montre donc que $\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c\Big) = 1$.

En utilisant les inégalités (1), on montre que $\lambda(D_\tau) = 1$.

Solution 6. [énoncé]

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \bigcap_{m\geq n} E_m$. On observe que

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} E_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Étant donné que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la croissance séquentielle de μ assure que

$$\mu(\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3}$$

Par ailleurs, pour tous entier $k \geq n$, nous observons que $A_n \subset T_k$. Il s'ensuit que

$$\mu(A_n) \leq \inf_{k\geq n} \mu(E_k).$$

En passant à la borne supérieure sur tous les entiers n de chaque côté de cette inégalité, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\geq 0} \mu(A_n) \leq \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} \mu(E_k) = \liminf_{n\to\infty} \mu(E_k). \tag{4}$$

On conclut en utilisant (3) et (4)

Solution 7. [énoncé]

Montrons que $\mathscr{T}$ vérifie l'axiomatique des tribus.

— *(Non vide)*
  L'ensemble $\emptyset$ est dénombrable, donc $\emptyset \in \mathscr{T}$.
— *(Stable par passage au complémentaire)*
  Soit $A \in \mathscr{T}$. Si A est dénombrable, alors $(A^c)^c = A$ ce qui assure que A^c est de complémentaire dénombrable et donc que $A^c \in \mathscr{T}$.
  Par ailleurs, si A est de complémentaire dénombrable, alors A^c est dénombrable et donc $A^c \in \mathscr{T}$.
— *(Stable par union dénombrable)*
  Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$. On effectue une disjonction de cas.
  Premier cas : Supposons que tous les $(A_n)_n$ sont dénombrables. Notons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. A est dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensemble dénombrable donc $A \in \mathscr{T}$.
  Second cas : Il existe un élément A_{n_0} ($n_0 \in \mathbb{N}$) dont le complémentaire est dénombrable. Notons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors $A^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subset A_{n_0}^c$. Comme toute sous partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable, A^c est dénombrable.